

Das Verhalten von ebenen Ultraschallwellen in homogen magnetisierten Einkristallen

Von GERHARD SIMON

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Gießen
(Z. Naturforsch. 13 a, 84—89 [1958]; eingegangen am 7. November 1957)

Herrn Professor Dr. L. BERGMANN zum 60. Geburtstag gewidmet

Elastische Schwingungen erzeugen in homogen magnetisierten ferromagnetischen Einkristallen infolge der Magnetostriktion zeitlich veränderliche Magnetfelder. Diese haben eine Rückwirkung auf die elastische Welle und führen einerseits zu einer Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von dem magnetischen Zustand des Kristalles, andererseits je nach der Größe der Leitfähigkeit zu einer Dämpfung der Welle.

Bei der Ausbreitung ebener elastischer Wellen zeigen ferromagnetische Einkristalle gegenüber nicht-ferromagnetischen Substanzen Abweichungen, die auf dem Vorhandensein des Magnetostriktionseffektes beruhen. Wenn das Material eine genügend große Leitfähigkeit besitzt, wird einerseits die Welle durch die Bildung von Wirbelstromwärme zusätzlich gedämpft und andererseits die Ausbreitungsgeschwindigkeit durch die Rückwirkung der Wirbelströme auf die Welle verändert. Beide Effekte sollen für den Fall eines homogen magnetisierten Einkristalles berechnet werden.

Bei einer nichtferromagnetischen Substanz wird die Ausbreitung einer elastischen Welle durch zwei Beziehungen zwischen den Auslenkungen und den Spannungen beschrieben: die elastische Differentialgleichung und das Hooke'sche Gesetz. Bei einem Ferromagnetikum tritt zu den Verzerrungen ein Anteil hinzu, der von der spontanen Magnetostriktion herrührt und von den Magnetisierungsänderungen abhängig ist. Wenn diese Magnetisierungsänderungen bekannt sind, kann man die im Ferromagnetikum modifizierte Schallausbreitung behandeln. Es ergibt sich gegenüber dem Nichtferromagnetikum ein kleines komplexes Zusatzglied, dessen Realteil die veränderte Ausbreitungsgeschwindigkeit und dessen Imaginärteil die zusätzliche Dämpfung beschreibt.

I. Die Magnetisierungsänderungen im homogen magnetisierten ferromagnetischen Einkristall

Die Magnetisierungsänderungen sind proportional zu den mechanischen Spannungen und zu dem von den Spannungen erzeugten magnetischen Wechselfeld, für das die MAXWELLSchen Gleichungen gelten und das im nächsten Abschnitt berechnet werden soll.

Die Magnetisierungsänderungen sind schon in einer früheren Arbeit hergeleitet worden¹, deshalb sollen hier nur die Ergebnisse referiert werden.

Betrachtet wird ein kubisches Kristallgitter, das homogen in der Richtung α_j ($j = 1, 2, 3$) magnetisiert ist. Der Betrag der Magnetisierung ist I_s . Die Richtungscosinus α_j sind in einem rechtwinkligen Koordinatensystem angegeben, dessen Achsen parallel zu den Würfelkanten der kubischen Symmetrie liegen. Die Richtung der Magnetisierung wird in erster Näherung durch das äußere magnetische Gleichfeld \bar{H}_j und die magnetische Kristallanisotropie K festgelegt. Die elastische Welle — die durch den Spannungstensor π_{jk} beschrieben wird — und das von der Welle erzeugte kleine magnetische Wechselfeld H_j können nur kleine Abweichungen von dieser vorgegebenen Richtung bewirken, d. h. die jeweilige Magnetisierungsrichtung α_j setzt sich zusammen aus der Richtung α_{j0} bei verschwindendem Spannungstensor und den kleinen Abweichungen γ_j :

$$\alpha_j = \alpha_{j0} + \gamma_j, \quad \sum_{j=1}^3 \alpha_{j0} \gamma_j = 0, \quad \sum_{j=1}^3 \alpha_{j0}^2 = 1. \quad (1)$$

Die α_{j0} sind aus der Bedingung:

$$2K\alpha_{j0}(1 - \alpha_{j0}^2) - \alpha_{j0} \left(4Ks_0 - I_s \sum_{j=1}^3 \alpha_{j0} \bar{H}_j \right) - I_s \bar{H}_j = 0, \\ s_0 = \alpha_{10}^2 \alpha_{20}^2 + \alpha_{20}^2 \alpha_{30}^2 + \alpha_{30}^2 \alpha_{10}^2 \quad (2)$$

zu bestimmen.

Die Wirkung des Spannungstensors auf die Magnetisierungsrichtung kann durch die Wirkung eines „Magnetfeldes“ H_j^e ersetzt werden. Mit den formalen Abkürzungen

$$\pi_{jj} = \pi_j, \quad \pi_{jk} = p_l \quad (j, k, l \text{ verschieden}), \quad (3)$$

¹ G. SIMON, Ann. Phys., Lpz. 1957.

$$P_{jk} = \begin{pmatrix} \alpha_{10} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{20} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{30} \end{pmatrix}, \quad N_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{30} & \alpha_{20} \\ \alpha_{30} & 0 & \alpha_{10} \\ \alpha_{20} & \alpha_{10} & 0 \end{pmatrix}$$

lautet das Ersatzmagnetfeld:

$$H_j^e = \frac{3}{I_s} \sum_{k=1}^3 (\lambda_{100} P_{jk} \pi_k + \lambda_{111} N_{jk} p_k). \quad (4)$$

Die gesamten Magnetisierungsänderungen sind *:

$$I_s \gamma_j = \mu_0 \sum_{k=1}^3 \chi_{jk} (H_k + H_k^e) \quad (5)$$

$$\chi_{jk} = \begin{pmatrix} \alpha_{10} & \alpha_{20} & \alpha_{30} \\ \alpha_{10} & \alpha_{20} & \alpha_{30} \\ \frac{\alpha_{10}}{s_0 - \sqrt{s_0^2 - 3p_0} - \alpha_{10}^2} & \frac{\alpha_{20}}{s_0 - \sqrt{s_0^2 - 3p_0} - \alpha_{20}^2} & \frac{\alpha_{30}}{s_0 - \sqrt{s_0^2 - 3p_0} - \alpha_{30}^2} \\ \frac{\alpha_{10}}{s_0 + \sqrt{s_0^2 - 3p_0} - \alpha_{10}^2} & \frac{\alpha_{20}}{s_0 + \sqrt{s_0^2 - 3p_0} - \alpha_{20}^2} & \frac{\alpha_{30}}{s_0 + \sqrt{s_0^2 - 3p_0} - \alpha_{30}^2} \end{pmatrix}.$$

Die erste Eigenrichtung ist die Magnetisierungsrichtung selbst, der zu ihr gehörende Eigenwert ist Null. Das ist nichts anderes als die einfache Aussage, daß in dieser Näherung die Magnetisierungsänderungen auf der Magnetisierungsrichtung senkrecht stehen.

Eine Entartung des Suszeptibilitätstensors (d. h. $\chi_2 = \chi_3$) tritt in zwei wichtigen Fällen ein:

$$1. \quad s_0^2 - 3p_0 = 0;$$

diese Bedingung ist für diejenigen Richtungen erfüllt, in denen die magnetische Kristallanisotropie ein Minimum hat.

$$2. \quad \bar{H} \gg K/I_s.$$

Dieser zweite Fall, Entartung bei großen Magnetfeldern, ist besonders wichtig. Bei genügend großem – aber nicht zu großem – magnetischem Gleichfeld ist die Magnetisierungsrichtung bestimmt und obige Forderung erfüllt, aber Geschwindigkeitsänderung und Dämpfung sind noch nicht zu klein. Man kann dann beide Effekte auf ihre Abhängigkeit von der Magnetisierungsrichtung prüfen. Bei sehr großen Magnetfeldern müssen sie aber verschwinden, weil dann keine Magnetisierungsänderungen mehr stattfinden.

II. Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Dämpfung ebener elastischer Wellen

Die Ausbreitung elastischer Wellen wird beschrieben durch die elastische Differentialgleichung:

$$\text{mit} \quad \chi_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_3 \end{pmatrix}, \quad p_0 = \alpha_{10}^2 \alpha_{20}^2 \alpha_{30}^2,$$

$$\chi_{2,3} = \frac{I_s^2 / \mu_0}{I_s \sum_{j=1}^3 \alpha_{j0} H_j + 2K(1-2s_0) - 6K(s_0 \mp \sqrt{s_0^2 - 3p_0})}.$$

Dabei ist der Suszeptibilitätstensor χ_{jk} schon in seiner Diagonalform dargestellt. Das Koordinatensystem x_j ist also schon in die „Eigenrichtungen“ von χ_{jk} gedreht worden. Der Transformationstensor für die Koordinaten lautet:

$$\varrho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \pi_{jk}}{\partial x_k}, \quad (6)$$

ϱ = spezif. Dichte, u_j = Auslenkungsvektor,

und durch das HOOKEsche Gesetz. Im kubischen Kristallgitter mit den drei Elastizitätsmoduln C_1 , C_2 , C_3 hat das HOOKEsche Gesetz die Form:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{jj}^{(\pi)} &= \frac{\pi_{jj}}{2C_2} - \frac{C_1}{2C_2(3C_1+2C_2)} (\pi_{11} + \pi_{22} + \pi_{33}), \\ \varepsilon_{jk}^{(\pi)} &= \frac{\pi_{jk}}{2C_3}, \quad j \neq k. \end{aligned} \quad (7)$$

Zu dem von den Spannungen erzeugten Verzerrungstensor $\varepsilon_{jk}^{(\pi)}$ kommt nun der spontane Verzerrungstensor $\varepsilon_{jk}^{(0)}$ hinzu; er hat die Form ²:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{jj}^{(0)} &= 3\lambda_{100} \alpha_{j0} \gamma_j, \\ \varepsilon_{jk}^{(0)} &= \frac{3}{2} \lambda_{111} (\alpha_{j0} \gamma_k + \alpha_{k0} \gamma_j), \quad j \neq k. \end{aligned} \quad (8)$$

Die gesamten Verzerrungen setzen sich als Summe von Gln. (7) und (8) zusammen und sind mit den Auslenkungen u_j per definitionem wie folgt verknüpft:

$$\varepsilon_{jk}^{(0)} + \varepsilon_{jk}^{(\pi)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \quad (9)$$

Es wird jetzt nur noch das magnetische Wechselfeld H_j benötigt, von dem die Magnetisierungsänderungen abhängen. Durch eine entsprechende Umformung der MAXWELLSchen Gleichungen erhält man

* Internationales Maßsystem, μ_0 = absolute Permeabilität.

² BECKER-DÖRING, Ferromagnetismus. Springer-Verlag, Berlin 1939, S. 144.

für H_j :

$$\Delta H_j - \mu_0 \varkappa \frac{\partial H_j}{\partial t} = \varkappa I_s \frac{\partial \gamma_j}{\partial t} - \frac{I_s}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_k}, \quad (10)$$

(\varkappa = spezif. Leitfähigkeit). Damit hat man insgesamt fünfzehn lineare Gleichungen für die fünfzehn unbekannten Größen: $\gamma_j, u_j, \pi_j, p_j, H_j$. Es sind zum Teil Differentialgleichungen. Zu deren Lösung soll angenommen werden, daß die räumliche und zeitliche Abhängigkeit aller unbekannten Größen durch den Ansatz einer fortschreitenden ebenen Welle beschrieben werden kann:

$$\exp \left\{ i \left(q \sum_{j=1}^3 q_j x_j - \omega t \right) \right\},$$

mit ω = Kreisfrequenz, c = Schallgeschwindigkeit,

$$q_j = \text{Ausbreitungsrichtung}, \quad \sum_{j=1}^3 q_j^2 = 1.$$

q wird als komplexe Größe angesetzt:

$$q = q_0 \frac{1 - i \delta/2\pi}{1 + \Delta c/c}$$

δ = logarithmisches Dekrement, Δc = Geschwindigkeitsänderung, $q_0 = \omega/c$.

Bei diesem Ansatz können alle Differentiationen nach dem Schema

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \rightarrow i q_j q, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i \omega$$

ersetzt werden. Danach hat man nur noch fünfzehn lineare homogene Gleichungen für die Amplituden der $\gamma_j, u_j, \pi_j, p_j, H_j$ zu lösen. Die Koeffizientendeterminante dieses Gleichungssystems muß verschwinden. Das liefert die Säkulargleichung zur Bestimmung der Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Die fünfzehn Gleichungen lassen sich zu fünf vektoriellen Gleichungen zusammenfassen, wobei die skalaren Koeffizienten zu dreireihigen, quadratischen Matrizen werden. Die fünfzehnzeilige Determinante wird zu einer fünfzeiligen Determinante, deren Elemente jedoch Matrizen sind. Bei Umformungen dieser Determinante ist zu beachten, daß bei Multiplikation mit Matrizen Zeilen nur von links und Spalten nur von rechts multipliziert werden dürfen, und daß keine Zeile oder Spalte mit einer singulären Matrix multipliziert werden darf.

Die fünfzeilige Determinante lautet:

$$\begin{array}{cccccc} \delta_{jk} & i q X_{jk} & i q Y_{jk} & 0 & 0 \\ -i q X_{jk} & \frac{1}{2 C_2} \left(\delta_{jk} - \frac{C_1}{3 C_1 + 2 C_2} A_{jk} \right) & 0 & 3 \lambda_{100} P_{jk} & 0 \\ -\frac{i}{2} q Y_{jk} & 0 & \frac{1}{2 C_3} \delta_{jk} & \frac{3}{2} \lambda_{111} N_{jk} & 0 \\ 0 & \frac{3 \mu_0}{I_s^2} \lambda_{100} \sum_{n=1}^3 \chi_{jn} P_{nk} & \frac{3 \mu_0}{I_s^2} \lambda_{111} \sum_{n=1}^3 \chi_{jn} N_{nk} & \delta_{jk} & \frac{\mu_0}{I_s} \chi_{jk} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_s}{\mu_0} (i \varkappa \omega \mu_0 \delta_{jk} - Q_{jk}) & (i \varkappa \omega \mu_0 - q^2) \delta_{jk} \end{array}$$

Darin bedeutet:

$$\begin{aligned} \delta_{jk} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & X_{jk} &= \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{pmatrix}, \\ Y_{jk} &= \begin{pmatrix} 0 & q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & q_1 \\ q_2 & q_1 & 0 \end{pmatrix}, & A_{jk} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ Q_{jk} &= \begin{pmatrix} q_1^2 & q_1 q_2 & q_1 q_3 \\ q_1 q_2 & q_2^2 & q_2 q_3 \\ q_1 q_3 & q_2 q_3 & q_3^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die zweite Spalte wird von rechts mit

$$E_{jk} = \delta_{jk} + \frac{C_1}{2 C_2} A_{jk}$$

multipliziert; E_{jk} genügt den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \left(\delta_{jk} - \frac{C_1}{3 C_1 + 2 C_2} A_{jk} \right) E_{kn} &= \delta_{jn}, \\ \sum_{n, m=1}^3 \chi_{jn} P_{nm} E_{mk} &= \sum_{n=1}^3 \chi_{jn} P_{nk}. \end{aligned}$$

Durch einige Umformungen bekommt man für die Determinante:

$$\begin{vmatrix} F_{jk} & 0 & 0 & G_{jk} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2 C_2} \delta_{jk} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2 C_3} \delta_{jk} & 0 & 0 \\ \sum_{n=1}^3 \chi_{jn} H_{nk} & 0 & 0 & C_{jk} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{jk} \end{vmatrix} = 0.$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$\begin{vmatrix} F_{jk} & G_{jk} \\ \sum_{n=1}^3 \chi_{jn} H_{nk} & C_{jk} \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

Es bedeutet:

$$\begin{aligned} F_{jk} &= \varrho \omega^2 \delta_{jk} - 2 C_2 q^2 \sum_{l,n=1}^3 X_{jl} E_{ln} X_{nk} \\ &\quad - C_3 q^2 \sum_{l=1}^3 Y_{jl} Y_{lk}, \\ G_{jk} &= -3i \varrho C_3 \lambda_{111} \left(\delta_{jk} \sum_{n=1}^3 \alpha_{n0} q_n \right. \\ &\quad \left. + \alpha_{j0} q_k + A \sum_{n=1}^3 P_{jn} X_{nk} \right), \\ H_{jk} &= -\frac{\mu_0}{I_s^2} G'_{jk}, \\ G'_{jk} &= G_{kj}, \end{aligned}$$

$$C_{jk} = \delta_{jk} - \frac{1}{i \varrho \omega \mu_0 - q^2} \left(i \varrho \omega \mu_0 \chi_{jk} - \sum_{n=1}^3 \chi_{jn} Q_{nk} \right),$$

$$A = 2(C_2 \lambda_{100} - C_3 \lambda_{111})/C_3 \lambda_{111}.$$

F_{jk} bildet den elastischen, C_{jk} den elektromagnetischen Anteil. H_{jk} und G_{jk} sind proportional zur Magnetostriktion und stellen Kopplungsglieder dar. Gl. (11) ist also die Säkulargleichung für eine magnetoelastische Welle, von der aber nur die Lösungen vom „elastischen Typ“ gesucht werden sollen. Bei verschwindender Magnetostriktion erhält man elastische und elektromagnetische Welle getrennt. Es ist zweckmäßig, bei vorgegebener Ausbreitungsrichtung q_j die Matrix F_{jk} auf Diagonalform zu bringen. Dies geschehe durch die Matrix K_{jk} :

$$\bar{F}_{jk} = \sum_{n,m=1}^3 K_{jn} F_{nm} K_{mk}^{-1}. \quad (12)$$

Um nun die magnetoelastischen Wellen vom elastischen Typ zu bekommen, ist es erforderlich, Gl. (11) weiter aufzulösen. Zu diesem Zweck muß die reziproke Matrix zu C_{jk} gebildet werden. Das gelingt am einfachsten in demjenigen Koordinatensystem, in dem χ_{jk} Diagonalform hat. Die nullte Näherung soll die elastischen Wellen geben, dann ergibt die Auflösung von Gl. (11) schließlich:

$$\begin{aligned} |\bar{F}_{jk} - O_{jk}| &= (F_{11} - O_{11})(F_{22} - O_{22})(F_{33} - O_{33}) \\ &\quad - (F_{11} - O_{11})O_{23}O_{32} - (F_{22} - O_{22})O_{13}O_{31} \\ &\quad - (F_{33} - O_{33})O_{12}O_{21} = 0 \quad (13) \end{aligned}$$

mit

$$O_{jk} = \frac{9q^2 C_3^2 \lambda_{111}^2}{I_s^2 / \mu_0} \sum_{l,m} \Phi_{lm} D_{lj} D_{mk},$$

$$D_{jk} = \sum_n a_{jn} K_{nk}^{-1} \sum_m \alpha_{m0} q_m + \sum_n a_{jn} q_n \sum_m \alpha_{m0} K_{mk}^{-1}$$

$$+ A \sum_{n,m,l} a_{jn} P_{nm} X_{ml} K_{lk}^{-1},$$

$$\Phi_{jk} = \frac{i \varrho \omega \mu_0 - q^2}{\Phi_{22} \Phi_{33} - \Phi_{23} \Phi_{32}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_2 \Phi_{22} & -\chi_2 \Phi_{23} \\ 0 & -\chi_3 \Phi_{32} & \chi_3 \Phi_{33} \end{pmatrix},$$

$$\Phi_{33} = i \varrho \omega \mu_0 (1 + \chi_2) - q^2 \left(1 + \chi_2 \sum_n a_{2n} q_n \right),$$

$$\Phi_{22} = i \varrho \omega \mu_0 (1 + \chi_3) - q^2 \left(1 + \chi_3 \sum_n a_{3n} q_n \right),$$

$$\Phi_{32} = -q^2 \chi_2 \sum_{n=1}^3 a_{2n} q_n \sum_{n=1}^3 a_{3n} q_n,$$

$$\Phi_{23} = -q^2 \chi_3 \sum_{n=1}^3 a_{2n} q_n \sum_{n=1}^3 a_{3n} q_n.$$

O_{jk} stellt das komplexe Zusatzglied dar, das von den ferromagnetischen Eigenschaften herröhrt. Aus $|\bar{F}_{jk}| = 0$ erhält man die drei Lösungen für ebene elastische Wellen, die es im Nichtferromagnetikum gibt. Bezeichnet man mit $C^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3$) den zu jeder dieser Lösungen gehörenden Elastizitätsmodul, so ist:

$$\bar{F}_{jj} = \varrho \omega^2 - C^{(j)} q_0^2 = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (14)$$

In Gl. (13) wird nun q^2 nach Potenzen der Magnetostriktionskonstanten entwickelt. Es wird nur das erste Korrekturglied zu q^2 berechnet. Die Lösung ist einfach, wenn alle $C^{(j)}$ verschieden sind. Dann gilt:

$$\varrho \omega^2 - C^{(j)} q^2 - O_{jj} = 0. \quad (15)$$

Es kann jedoch vorkommen, daß zwei Transversalwellen die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit haben, also auch das gleiche $C^{(j)}$. Dann liefert Gl. (13) eine quadratische Gleichung für das Korrekturglied, deren Wurzel sich nicht immer ziehen läßt. Diese elastische Entartung soll aber nicht eingehender untersucht werden. Bei gewissen einfachen Verhältnissen lassen sich Lösungen finden, die im nächsten Abschnitt angegeben werden.

Bei Gültigkeit der Formel (15) erhält man für die relative Geschwindigkeitsänderung $\Delta c/c$ gegenüber dem Nichtferromagnetikum und für das log-

arithmische Dekrement δ :

$$+ \frac{\Delta c}{c} + i \frac{\delta}{2\pi} = - \frac{9}{2} \frac{C_3^2 \lambda_{111}^2}{C^{(j)} I_s^2 / \mu_0} \sum_{m,n=1}^3 \Phi_{mn} D_{mj} D_{nj}. \quad (16)$$

Diese Formel ist in der allgemeinen Form noch sehr schwer zu diskutieren. Bei vorgegebener Kristallenergie und vorgegebenem magnetischen Gleichfeld H_j müssen zunächst die Magnetisierungsrichtung α_{j0} und die beiden anderen Eigenrichtungen a_{2j} und a_{3j} des Suszeptibilitätstensors ermittelt werden. Bei vorgegebener Ausbreitungsrichtung – für die die elastische Welle nicht entarten darf – muß dann der Tensor K_{jk}^{-1} bestimmt werden.

Das theoretische Resultat wird aber wesentlich durchsichtiger, wenn der Suszeptibilitätstensor entartet. Dieser Fall soll im folgenden Abschnitt betrachtet werden.

Ausbreitung in (100)-Richtung:

Longitudinalwelle:

$$\frac{\Delta c}{c} + i \frac{\delta}{2\pi} = \frac{9}{2} \frac{C_2^2 \lambda_{100}^2}{(C_1 + 2C_2) I_s^2 / \mu_0} \frac{\chi}{\mu} \cdot f(\omega, \psi_1) 4 \psi_1^2 (1 - \psi_1^2). \quad (19)$$

Das Verhalten der Transversalwellen läßt sich dann leicht übersehen, wenn die Magnetisierungsrichtung in bestimmten Ebenen liegt:

1. Magnetisierung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung $\alpha_{10} = 0$. Die Welle erfährt keine Dämpfung, sie hat aber zwei verschiedene Ausbreitungsgeschwindigkeiten: Sind Magnetisierungs- und Schwingungsrichtung zueinander senkrecht, dann hat die Welle eine Geschwindigkeit wie im nichtferromagnetischen Kristall, sind sie parallel zueinander, dann ändert sie sich demgegenüber um

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{9}{2} \frac{C_3^2 \lambda_{111}^2}{I_s^2 / \mu_0} \frac{\chi}{\mu}.$$

III. Die Lösung bei großen Magnetfeldern

Das magnetische Gleichfeld H möge groß gegen K/I_s sein. Dann entartet der Suszeptibilitätstensor ($\chi_2 = \chi_3 = \chi$) und Formel (16) muß unabhängig von den Eigenrichtungen a_{2j} und a_{3j} werden. Im folgenden tritt dann mehrfach der Fall ein, daß sich die gesamte Frequenzabhängigkeit entweder durch

$$f(\omega, \psi_1) = \mu \frac{i \chi \omega \mu_0 - q^2}{i \chi \omega \mu_0 \mu - q^2 [1 + \chi (1 - \psi_1^2)]} \quad (17)$$

$$= \frac{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{\chi}{\mu} \psi_1^2\right)}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{\chi}{\mu} \psi_1^2\right)^2} + i \frac{\frac{\omega}{\omega_0} \frac{\chi}{\mu} \psi_1^2}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{\chi}{\mu} \psi_1^2\right)^2},$$

($\omega_0 = \sqrt{c^2 \mu_0}$, ψ_1 = Cosinus des Winkels zwischen Magnetisierungs- und Ausbreitungsrichtung)

oder durch

$$g(\omega) = \mu \frac{i \chi \omega \mu_0 - q^2}{i \chi \omega \mu_0 \mu - q^2} = \frac{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \frac{1}{\mu}}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \frac{1}{\mu^2}} + i \frac{\frac{\omega}{\omega_0} \frac{\chi}{\mu}}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \frac{1}{\mu^2}} \quad (18)$$

darstellen läßt. Real- und Imaginärteil entsprechen dann der relativen Geschwindigkeitsänderung und der Dämpfung. ω_0 ist diejenige Frequenz, bei der Skineffekt-Eindringtiefe und elastische Wellenlänge miteinander vergleichbar werden. Sie liegt bei Nickel in der Größenordnung 10⁸ Hz. Angemerkt sei noch die Eigenschaft: $f(\omega, \psi_1 = 0) \equiv 1$.

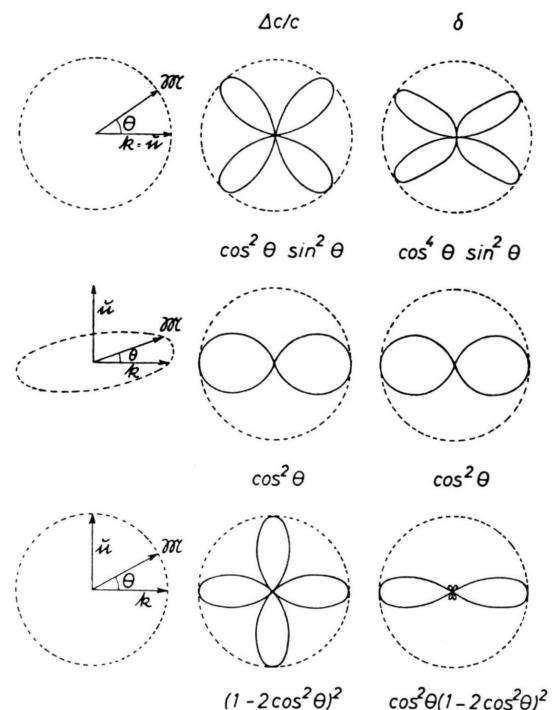


Abb. 1. Die Winkelabhängigkeit der relativen Geschwindigkeitsänderung $\Delta c/c$ und des logarithmischen Dekrementes δ ebener elastischer Wellen im isotropen, ferromagnetischen Kristall. \mathbf{k} = Ausbreitungsrichtung, \mathbf{u} = Schwingungsrichtung. Die Magnetisierungsrichtung \mathfrak{M} wird in der angedeuteten Weise variiert.

2. Magnetisierungsrichtung senkrecht zur Schwingungsrichtung:

$$\frac{\Delta c}{c} + i \frac{\delta}{2\pi} = \frac{9}{2} \frac{C_3 \lambda_{111}^2}{I_s^2/\mu_0} \frac{\chi}{\mu} g(\omega) \psi_1^2. \quad (20)$$

3. Magnetisierungs-, Schwingungs- und Ausbreitungsrichtung in der gleichen Ebene:

$$\frac{\Delta c}{c} + i \frac{\delta}{2\pi} = \frac{9}{2} \frac{C_3 \lambda_{111}^2}{I_s^2/\mu_0} \frac{\chi}{\mu} f(\omega, \psi_1) (1 - 2\psi_1^2)^2. \quad (21)$$

In den Gln. (19) und (21) beeinflußt das Frequenzverhalten die Winkelabhängigkeit; diese ist verschieden für $\omega \ll \omega_0$ oder $\omega \gg \omega_0$. In Abb. 1 ist sie für $\omega \ll \omega_0$ für die drei Fälle (19) bis (21) graphisch dargestellt.

Genau die gleichen Formeln (19) bis (21) bekommt man bei elastischer und magnetostruktiver Isotropie (d. h. für $C_2 = C_3$, $\lambda_{100} = \lambda_{111} = \lambda$ und $A = 0$).

$$\frac{\Delta c}{c} + i \frac{\delta}{2\pi} = \frac{9}{2} \frac{C_3 \lambda_{111}^2}{I_s^2/\mu_0} \frac{\chi}{\mu} \left[f(\omega, \varphi_1) \cdot \left(1 - \varphi_2^2 - 4\varphi_1^2\varphi_3^2 - \varphi_1^2\varphi_2^2 \frac{q^2\chi}{i\omega\mu_0\mu - q^2} \right) \right]. \quad (23)$$

Transversalwelle,

Schwingungsrichtung parallel (110):

$$\frac{\Delta c}{c} + i \frac{\delta}{2\pi} = \frac{9}{2} \frac{C_3 \lambda_{111}^2}{I_s^2/\mu_0} \frac{\chi}{\mu} \left[f(\omega, \varphi_1) \cdot \left(1 - \varphi_3^2 - 4\varphi_1^2\varphi_2^2 - \varphi_1^2\varphi_3^2 \frac{q^2\chi}{i\omega\mu_0\mu - q^2} \right) \right]. \quad (24)$$

Dabei bedeuten:

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}(\alpha_{10} + \alpha_{20}), \quad \varphi_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}}(\alpha_{10} - \alpha_{20}), \quad \varphi_3 = \alpha_{30}.$$

Diese Formeln werden sehr übersichtlich, wenn man die Magnetisierung nur in den Ebenen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ und $\varphi_3 = 0$ variiert. Die eckigen Klammern in den Gln. (22) bis (24) werden dann viel einfacher, sie sind in der folgenden Tabelle angegeben:

	$\varphi_1 = 0$	$\varphi_2 = 0$	$\varphi_3 = 0$
(22)	$\frac{A^2}{4} g(\omega) \varphi_2^2 \varphi_3^2$	$\left(1 + \frac{A}{4}\right)^2 f(\omega, \varphi_1) 4\varphi_1^2 \varphi_3^2$	$f(\omega, \varphi_1) 4\varphi_1^2 \varphi_2^2$
(23)	φ_3^2	$f(\omega, \varphi_1) (1 - 2\varphi_1^2)^2$	$g(\omega) \varphi_1^2$
(24)	φ_2^2	$g(\omega) \varphi_1^2$	$f(\omega, \varphi_1) (1 - 2\varphi_1^2)^2$

Ausbreitung in (110)-Richtung:

Longitudinalwelle:

$$\frac{\Delta c}{c} + i \frac{\delta}{2\pi} = \frac{9}{2} \frac{C_3 \lambda_{111}^2}{(C_1 + C_2 + C_3) I_s^2/\mu_0} \frac{\chi}{\mu} \left[f(\omega, \varphi_1) \cdot \left\{ 4\varphi_1^2\varphi_2^2 + 4\varphi_1^2\varphi_3^2 \left(1 + \frac{A}{4}\right)^2 + \frac{A^2}{4}\varphi_2^2\varphi_3^2 g(\omega) \right\} \right]. \quad (22)$$

Transversalwelle,

Schwingungsrichtung parallel (001):

Die in dieser Tabelle für $\omega \ll \omega_0$ auftretenden Winkelfunktionen sind alle schon in Abb. 1 enthalten.

Für die Ausbreitungsrichtung (111) sei nur die Longitudinalwelle angegeben:

$$\frac{\Delta c}{c} + i \frac{\delta}{2\pi} = \frac{27}{2} \frac{C_3^2 \lambda_{111}^2}{(3C_1 + 2C_2 + 4C_3) I_s^2/\mu_0} \frac{\chi}{\mu} \cdot f(\omega, \psi_1) 4\psi_1^2(1 - \psi_1^2). \quad (25)$$

Herrn Prof. DÖRING danke ich herzlichst für sein reges Interesse und seine fördernden Ratschläge, der Deutschen Forschungsgemeinschaft für eine Unterstützung der Arbeit.